

Εφαρμογή γενετικών αλγορίθμων

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε μια ανάθεση τιμών στις δυαδικές μεταβλητές a, b, c, d, e και f , ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω σχέση (είναι γνωστό σαν πρόβλημα λογικής ικανοποιησιμότητας – SAT):

$$G = (\neg a \vee c) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg e) \wedge (\neg b \vee c \vee d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg e \vee f)$$

Σημείωση: Στο πρόβλημα λογικής ικανοποιησιμότητας (SAT), ο στόχος είναι να βρούμε ένα συνδυασμό των τιμών ενός συνόλου δυαδικών μεταβλητών που να ικανοποιούν μια λογική συνάρτηση F (δηλαδή $F = \text{True}$). Αυτό το πρόβλημα είναι ένα πολύ γνωστό NP-hard πρόβλημα με πολλές πρακτικές εφαρμογές. Ποιο αναλυτικά το πρόβλημα ορίζεται ως εξής: Δεδομένης μιας λογικής συνάρτησης, πρέπει να βρεθεί ένα στιγμιότυπο των τιμών των μεταβλητών της οι οποίες κάνουν τη συνάρτηση αληθή. Θυμηθείτε ότι μια λογική συνάρτηση είναι μια σύνδεση ατομικών προτάσεων, όπου μια πρόταση είναι διάζευξη κυριολεκτικών, όπου ένα κυριολεκτικό είναι μια δυαδική μεταβλητή (ή η άρνησή της), που παίρνει τιμές true ή false . Το ζητούμενο, λοιπόν, είναι για μια λογική συνάρτηση $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (με συγκεκριμένη δομή), να βρεθεί η σωστή τιμή για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή x_i , για όλα τα $i=1, \dots, n$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{True}.$$

Θέλουμε, λοιπόν, να χρησιμοποιήσουμε Γενετικό Αλγόριθμο για να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα SAT, 6 μεταβλητών.

Θεωρείστε ότι έχετε γεννήτρια τυχαίων αριθμών η οποία σας δίνει (με τη σειρά) την παρακάτω ακολουθία τυχαίων αριθμών από το 0 ως το 1.

0.5653, 0.7850, 0.3352, 0.4554, 0.2919, 0.5357, 0.2466, 0.5077, 0.4815, 0.6790, 0.4668, 0.6764, 0.4161,

0.7796, 0.5559, 0.1280, 0.7301, 0.1737, 0.2309, 0.7655, 0.3338, 0.1255, 0.5173, 0.3148, 0.2881, 0.6349,

0.8326, 0.3914, 0.7681, 0.5750, 0.0540, 0.6870, 0.6314, 0.6923, 0.2917, 0.9627, 0.4428, 0.4976, 0.0262,

0.0744, 0.2175, 0.7504, 0.8668, 0.6196, 0.0340, 0.3349, 0.2569, 0.6596, 0.8477, 0.3751, 0.9119, 0.4655,

0.3057, 0.1837, 0.7605, 0.8132, 0.2156, 0.3142, 0.5552, 0.8473, 0.4889, 0.0474, 0.6617, 0.1524, 0.3824,

0.2644, 0.3426, 0.1142, 0.3901, 0.1443, 0.7898, 0.5873

Υπόδειξη 1: Χρησιμοποιείτε τους τυχαίους αριθμούς για να δημιουργήσετε τον αρχικό πληθυσμό, για να επιλέξετε ζευγάρια χρωμοσωμάτων, τα σημεία διασταύρωσης και τις ενδεχόμενες μεταλλάξεις. Σε περίπτωση που χρειαστείτε επιπλέον τυχαίους αριθμούς, χρησιμοποιείτε τον πίνακα ξανά από την αρχή.

(α) Ποιο είναι το μέγεθος του χώρου αναζήτησης;

Απάντηση:

Αφού έχουμε 6 δυαδικές μεταβλητές, το μέγεθος του χώρου αναζήτησης θα είναι $2^6=64$.

(β) Να επιλέξετε ένα τρόπο αναπαράστασης και κωδικοποίησης για τα άτομα (χρωμοσώματα) του πληθυσμού. Να εξηγήσετε το λόγο για την επιλογή σας και να δώσετε ένα παράδειγμα ατόμου (χρωμοσώματος).

Απάντηση:

Αφού κάθε λύση είναι μία δυαδική συμβολοσειρά, με 6 bits, κάθε χρωμόσωμα θα έχει 6 ψηφία, μηδενικά ή άσσους, τα οποία αντιστοιχούν στις μεταβλητές a, b, c, d, e και f αντίστοιχα. Η τιμή 0 για ένα bit ισοδυναμεί με το ψευδές (false) ενώ η τιμή 1 ισοδυναμεί με το αληθές (true). Για παράδειγμα, ένα άτομο θα είναι: 110010.

(γ) Να δημιουργήσετε έναν αρχικό πληθυσμό τεσσάρων χρωμοσωμάτων με τυχαίο τρόπο.

Απάντηση:

Δημιουργούμε τον αρχικό πληθυσμό των τεσσάρων χρωμοσωμάτων χρησιμοποιώντας τους 24 πρώτους τυχαίους αριθμούς. Κάθε φορά που ο τυχαίος αριθμός είναι μικρότερος από 0.50, το αντίστοιχο bit είναι μηδέν, ενώ κάθε φορά που ο τυχαίος αριθμός είναι μεγαλύτερος του 0.5, το αντίστοιχο bit είναι μονάδα.

Άρα ο αρχικός πληθυσμός θα είναι: 110001, 010101, 011010, 010010.

(δ) Η G προφανώς, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν συνάρτηση καταλληλότητας, γιατί για κάθε συμβολοσειρά που δεν είναι λύση, δίνει την τιμή 0 (False), (αντίστοιχα, για κάθε συμβολοσειρά που είναι λύση δίνει την τιμή 1 (True)), άρα όλα τα άτομα που δεν είναι λύσεις δίνουν την ίδια καταλληλότητα (το ίδιο συμβαίνει και για τα άτομα που είναι λύσεις). Να ορίσετε μια συνάρτηση καταλληλότητας, που δεν έχει το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Απάντηση:

Η G δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν συνάρτηση καταλληλότητας, γιατί κάθε άτομο που δεν είναι λύση, θα δίνει τιμή 0 (False), άρα δεν μπορεί να κάνει διαφοροποίηση της απόδοσης κάθε υποψήφιας λύσης. Χρησιμοποιούμε ως συνάρτηση αξιολόγησης το πλήθος των όρων της σύζευξης που ικανοποιεί κάθε υποψήφια λύση. Έτσι ο μέγιστος βαθμός κάθε υποψήφιας λύσης είναι ο 5 (που αντιστοιχεί και στις πραγματικές λύσεις του προβλήματος) και ο ελάχιστος το 0. Βαθμολογούμε λοιπόν τις τέσσερις λύσεις ως εξής:

A = 110001 → 4

B = 010101 → 4

Γ = 011010 → 4

Δ = 010010 → 2

(ε) Να επιλύσετε το πρόβλημα εφαρμόζοντας τις τεχνικές της διασταύρωσης και της μετάλλαξης. Θεωρείστε πιθανότητα διασταύρωσης ίση με 1 και μετάλλαξης ίση με 0.001.

Απάντηση:

Υπολογίζουμε τις αθροιστικές καταλληλότητες των τεσσάρων χρωμοσωμάτων:

A = 110001 → 4

B = 010101 → 8

Γ = 011010 → 12

Δ = 010010 → 14

Δημιουργούμε τα 2 ζευγάρια προς διασταύρωση, χρησιμοποιώντας τους επόμενους τέσσερις τυχαίους αριθμούς, πολλαπλασιασμένους επί 14. Οι αριθμοί αυτοί, μετά τον πολλαπλασιασμό, είναι οι:

4.0334, 8.8886, 11.6564, 5.4796

δημιουργώντας τα ζευγάρια B-Γ και Γ-B. Για κάθε ένα ζευγάρι πρέπει τώρα να επιλέξουμε το σημείο στο οποίο θα γίνει η διασταύρωση. Υπάρχουν πέντε υποψήφιες θέσεις, άρα χρειαζόμαστε δύο τυχαίους αριθμούς από το 0 ως το 5. Αυτοί είναι οι εξής (με πολλαπλασιασμό των επόμενων δύο τυχαίων αριθμών επί 5):

3.8405, 2.875

και στρογγυλοποιώντας τους, δίνουν ως σημεία διασταύρωσης τις θέσεις 4 και 3 αντίστοιχα.

Άρα, μετά τις διασταυρώσεις παίρνουμε τα εξής νέα χρωμοσώματα:

Γονείς

B = 0101-01

Γ = 0110-10

Απόγονοι

A' = 010110

B' = 011001

$\Gamma = 011-010$

$\Gamma' = 011101$

$B = 010-101$

$\Delta' = 010010$

Στη συνέχεια εξετάζουμε το ενδεχόμενο μετάλλαξης. Οι απόγονοι έχουν συνολικά 24 bits που μπορεί να υποστούν μετάλλαξη, το καθένα με πιθανότητα μετάλλαξης 0.001. Κοιτάζουμε στους επόμενους 24 τυχαίους αριθμούς εάν υπάρχει κάποιος που είναι μικρότερος από 0.001. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, οπότε ο νέος πληθυσμός είναι όπως περιγράφηκε στον παραπάνω πίνακα.

Η βαθμολογία των τεσσάρων νέων χρωμοσωμάτων είναι η εξής:

$A' = 010110 \rightarrow 3$

$B' = 011001 \rightarrow 5$

$\Gamma' = 011101 \rightarrow 5$

$\Delta' = 010010 \rightarrow 2$

Βλέπουμε λοιπόν ότι δημιουργήθηκαν δύο λύσεις, οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει..